

# **Pour faire vivre les mathématiques dans les domaines d'apprentissage au CYCLE 3**

***Entiers, fractions, décimaux et situations-problèmes***

En référence aux travaux de R.BRISSIAUD, G.BROUSSEAU et G.VERGNAUD

**Gilles TEYSSÉDRE, IEN Rochefort  
François CHEVALIER, CPC – Septembre 2017**

*D'après les travaux de M.Naudin (CPC Royan), Mme CHALAUX (CPC Jonzac) et Mme PRELOIS (IEN Jonzac)*

# Principes didactiques de la formation

- Concept de nombre -> Système décimal de position -> numération fractionnaire et décimale
- **Résolution de problèmes** au centre d'une activité mathématique quotidienne ;
- S'appuyer sur les **compétences acquises** :
  - au C1 : **subitisation**, comptage dénombrement, comparaisons des nombres 1 à 9 ;
  - et C2 : dénombrement par calcul et comparaisons dans des situations de problèmes variées, **calcul mental et calcul en ligne** préféré au calcul en colonne, **maîtrise du lexique** ; nombres jusqu'à 10 000 ;
- renforcer les **automatismes**

# Fondements pédagogiques de la formation

- Dans le respect de la liberté pédagogique :
  - S'appuyer sur des **activités ritualisées** (calcul mental, problème) ;
  - favoriser **les interactions et l'engagement** des élèves : collaborer ;
  - « déployer » le nombre en situation concrète **tous les jours dans tous les domaines** (vie de classe et vie de l'école, activités physiques, artistiques, scientifiques, numériques et de codage...) ;
  - **manipuler** autant que de besoin, avec des dispositifs variés, pour faire vivre les situations.

C  
O  
N  
T  
I  
N  
U  
I  
T  
É

**Cycle 1**

Concept de nombre

**Cycle 2**

Numération de position

**Cycle 3**

Fractions et décimaux

P  
R  
O  
B  
L  
È  
M  
E  
S

# Problèmes

Ensemble des problèmes que la maîtrise du concept permet de résoudre efficacement.

# Langage

Ensemble des représentations langagières et non-langagières qui permettent de le représenter : mots, symboles, représentations schématiques...

# Concept

# Propriétés

Ensemble des définitions, propriétés, théorèmes qui permettent de justifier les techniques utilisées

# Invariants

# Techniques

Ensemble des résultats connus, des techniques, des procédures qui permettent de travailler avec ce concept

**Nombres**

**Langage**

**Problèmes**

**Techniques  
et propriétés**

Au cycle 2, la résolution de problèmes est au centre de l'activité mathématique.

- \* caractère ludique
- \* pas de simples application des opérations
- \* recherches et tâtonnements
- \* Interdisciplinarité des situations

La composante écrite de l'activité mathématique devient essentielle.  
\*d'abord des écritures et représentations produites en situation \*  
aller vers des formes conventionnelles.

Cycle 1

concept de nombre

Invariants

Technique

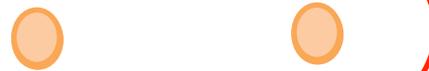
Dénombrer

Déterminer le nombre d'éléments de la collection

Subitisation

Calcul

Comptage



« un »



« deux »



« trois »



« quatre »

**Subitiser**

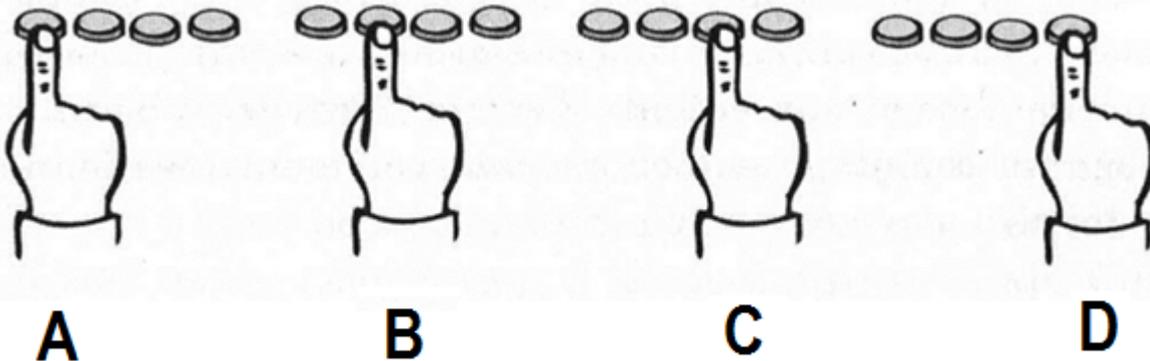
**Calculer**

**Compter**

**Quelle technique est  
dominante ?**

**Dénombrer en  
comptant,  
est-ce suffisant ?**

**A B C D E F G**  
**H I J K L M N**  
**O P Q R S T U**  
**V W X Y Z**



**Il y a  
« D »  
jetons.**

1. Réciter la suite des nombres.

2. Trouver le nombre après « E » ?

3. Réciter la suite des nombres à partir de G.



# Dénombrer :



H



**Vous avez une parfaite  
maîtrise du dénombrement  
par comptage !**

# Calcul mental :

$$A + B = C$$

$$F + F = L$$

$$G + H = O$$

# Calcul mental :

$$1 + 2 = 3$$

$$6 + 6 = 12$$

$$7 + 8 = 15$$

# Calcul posé :

G D I  
+ F G

---

H A F

## Conclusion :

**La connaissance, même parfaite, de la suite des nombres ne permet pas d'accéder au calcul.**

# Invariants

$$A + B =$$

$$C + D =$$

Si  $C + C = F$  alors combien font

$$C + D = ? \quad C + B = ?$$

Si  $D + E = I$  alors combien font

$$E + D = ?$$

- **mémoire d'une quantité**
  - égalisation
  - comparaison
- **mémoire d'un rang**
- **résolution de problèmes sur les quantités**
  - augmentation
  - réduction
  - partage
  - réunion

*anticiper le résultat  
d'une action sur une quantité*
- **résolution de problèmes de déplacement (piste graduée)**

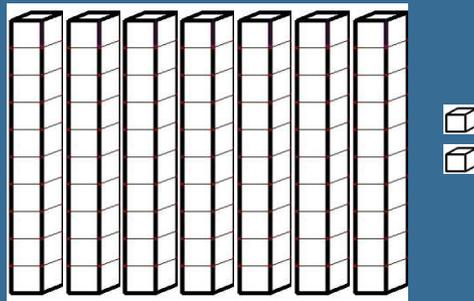
Vocabulaire spécifique :

-unités, dizaines, centaines

-mille, milliers, million, milliard

Passer d'un registre d'expression d'un nombre à un autre

Analogique



Verbale

« soixante-douze »

Symbolique

72

- les **signes** constituant le lexique sont « 0 », « 1 », « 2 », « 3 », « 4 », « 5 », « 6 », « 7 », « 8 », « 9 »
- la valeur d'un signe dépend de sa **position** dans l'écriture d'un nombre
- cette valeur représente un **groupement** d'unités inférieures qui sont échangées contre un élément de l'unité immédiatement supérieure
- les groupements permettant de passer d'une unité à l'autre se font en échangeant **dix** unités d'un ordre contre une unité de l'ordre immédiatement supérieur
- le signe « 0 » marque l'absence de groupement d'une unité

*aspect positionnel  
de la numération*

*décimalité de la  
numération*

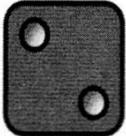
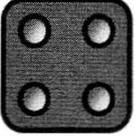
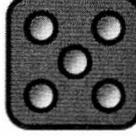
120 971

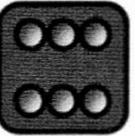
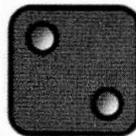
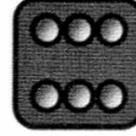
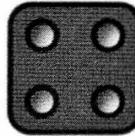
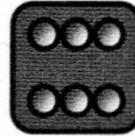
Pas de groupement

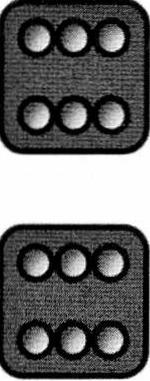
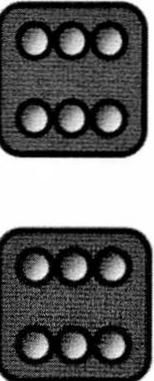
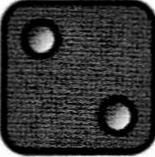
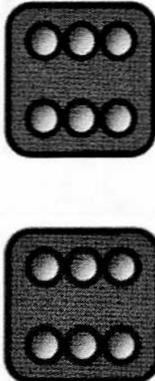
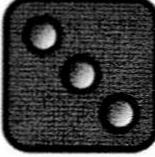
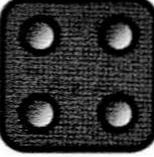
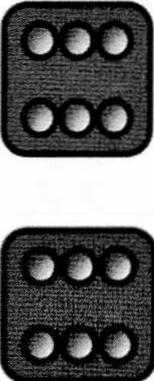
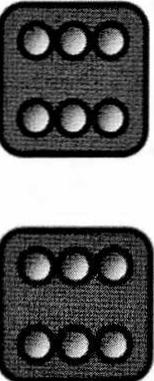


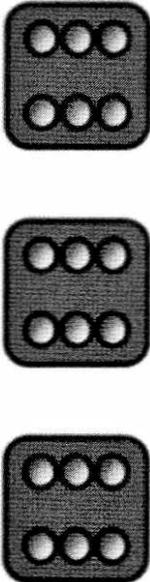
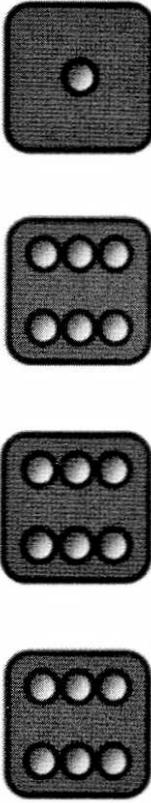
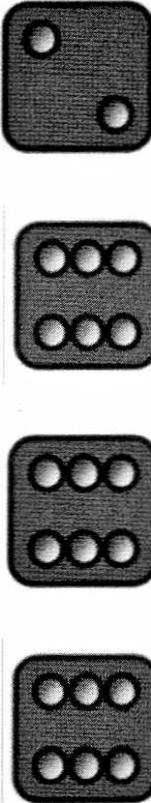
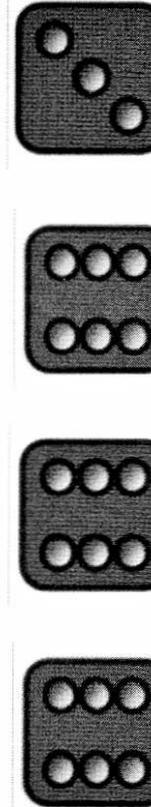
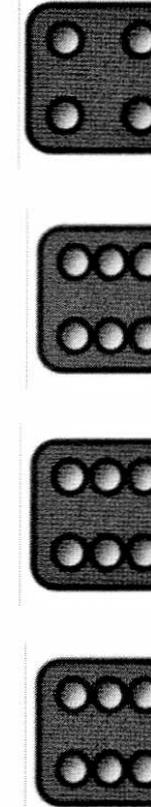
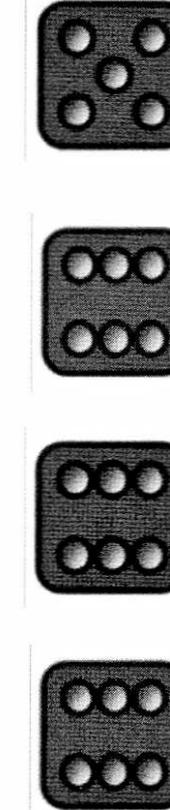
10

# Pour cerner l'enjeu d'apprentissage de la numération décimale de position : recours à une autre numération

B	C	D	E	F
<i>un</i>	<i>deux</i>	<i>trois</i>	<i>quatre</i>	<i>cing</i>
				

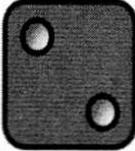
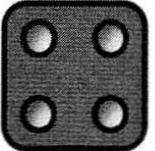
BA	BB	BC	BD	BE	BF
<i>six</i>	<i>sept</i>	<i>huit</i>	<i>six-trois</i>	<i>six-quatre</i>	<i>six-cing</i>
	 	 	 	 	 

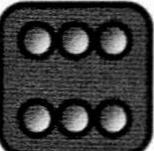
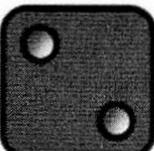
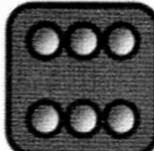
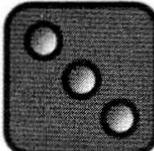
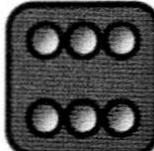
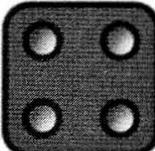
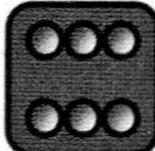
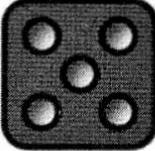
CA	CB	CC	CD	CE	CF
<i>douze</i>	<i>douze-un</i>	<i>douze-deux</i>	<i>douze-trois</i>	<i>douze-quatre</i>	<i>douze-cinq</i>
	  	  	  	  	  

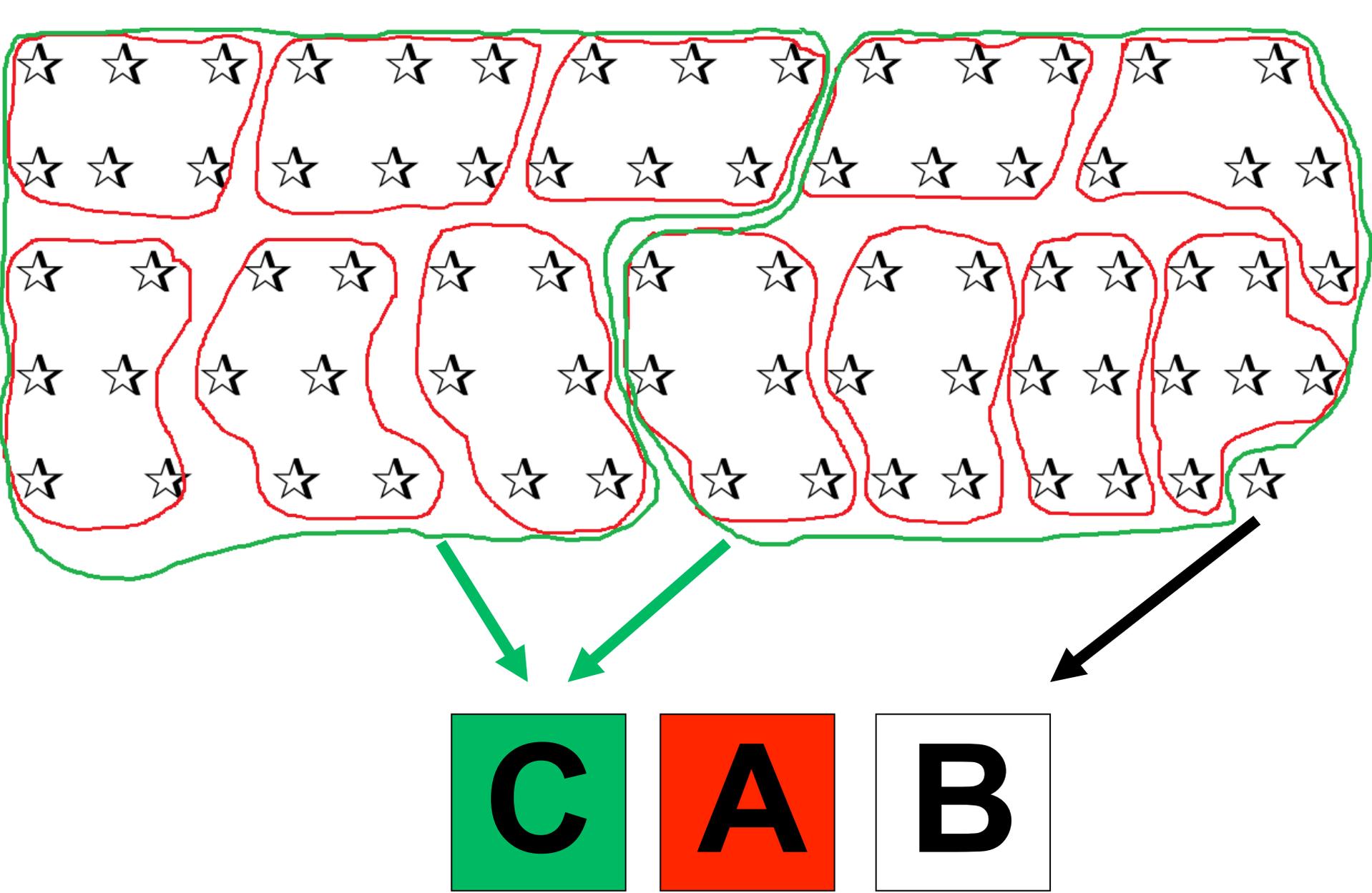
DA	DB	DC	DD	DE	DF
<i>trix</i>	<i>trix-un</i>	<i>trix-deux</i>	<i>trix-trois</i>	<i>trix-quatre</i>	<i>trix-cinq</i>
					

# Combien y-a-t-il d'étoiles dans ce nouveau système de numération ?



B	C	D	E	F
<i>un</i>	<i>deux</i>	<i>trois</i>	<i>quatre</i>	<i>cinq</i>
				

BA	BB	BC	BD	BE	BF
<i>six</i>	<i>sept</i>	<i>huit</i>	<i>six-trois</i>	<i>six-quatre</i>	<i>six-cinq</i>
	 	 	 	 	 



**Ce qui nous a posé problème  
avec ce nouveau système  
de numération**

## Analogique



**Le code ne renseigne pas directement sur une représentation de la quantité**

est-ce que CAB c'est beaucoup ? Dans IJK combien de fois y-a-t-il CAB ?  
= le lien quantité-code-désignation est à construire au quotidien, ainsi que les relations, les rapports entre les nombres.

**Verbale**

« deux sextus un »

**Symbolique**

**CAB**



**Le zéro : en comprendre la nécessité, le sens** savoir qu'il existe et code un « rien » ne suffit pas pour comprendre le codage du nombre

**Une fois la base déterminée, il reste difficile de coder**  
Il ne suffit pas de savoir faire des groupes de 6

Situations « échange »



Voci une feuille de jeu de banquier

5
6
4
6
4
6

total 31

matériel B, R, J

$25 + 1 + 5$

**CODAGE**

**DÉCODAGE**

# PROGRAMMES 2016

# MATHEMATIQUES

## CYCLE 3

..... Développement de 6 compétences.....

Chercher



$1+2=$



Modéliser

Représenter



Calculer

Raisonner



Communiquer

*[...] Les situations sur lesquelles portent les problèmes sont, le plus souvent, issues d'autres enseignements, de la vie de classe ou de la vie courante.*

*Les élèves fréquentent également des problèmes issus d'un contexte interne aux mathématiques.*

*La mise en perspective historique de certaines connaissances (numération de position, apparition des nombres décimaux, du système métrique, etc.) contribue à enrichir la culture scientifique des élèves.*

*On veille aussi à proposer aux élèves des problèmes pour apprendre à chercher qui ne soient pas directement reliés à la notion en cours d'étude, qui ne comportent pas forcément une seule solution, qui ne se résolvent pas uniquement avec une ou plusieurs opérations mais par un raisonnement et des recherches par tâtonnements*

...dans 3 domaines d'étude



Nouveauté :  
initiation à la  
programmation

Nombres  
et  
Calculs

Gestion de données  
et proportionnalité  
ventilées dans les  
trois domaines

La résolution de problèmes  
est au centre de l'activité  
mathématique

Grandeurs  
et  
Mesures

Espace  
et  
Géométrie

La résolution de problèmes constitue le critère principal  
de la maîtrise des connaissances dans tous les domaines  
mathématiques et constitue le point de départ de  
l'acquisition de nouvelles connaissances



## Chercher



- Prélever et organiser les informations nécessaires à la résolution de problèmes à partir de supports variés : textes, tableaux, diagrammes, graphiques, dessins, schémas, etc.
- S'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées, en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle.
- Tester, essayer plusieurs pistes de résolution.



## Modéliser

- Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne.
- Reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité.

## Représenter



- Utiliser des outils pour représenter un problème : dessins, schémas, diagrammes, graphiques, écritures avec parenthésages ...



## Calculer

- Calculer avec des nombres décimaux, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies ou des techniques appropriées (mentalement, en ligne, ou en posant les opérations).
- Contrôler la vraisemblance de ses résultats.
- Utiliser une calculatrice pour trouver ou vérifier un résultat.

## Raisonner



- Résoudre des problèmes nécessitant l'organisation de données multiples ou la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement.
- Progresser collectivement dans une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui.
- Justifier ses affirmations et rechercher la validité des informations dont on dispose.



## Communiquer

- Utiliser progressivement un vocabulaire adéquat et/ou des notations adaptées pour décrire une situation, exposer une argumentation.
- Expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.

Compréhension de la notion de nombre, des nombres rationnels  
Laetitia DESMET, Ph.D, Université catholique de Louvain

<http://www.cnesco.fr/fr/numeration/paroles-dexperts/notion-de-nombre/>

- **Confusion des élèves lors de l'apprentissage des nombres rationnels ...**
- L'accommodation aux nombres rationnels serait **moins laborieuse si l'apprentissage des nombres naturels permettait d'anticiper l'enseignement des nombres rationnels...**
- **Explication de l'écriture fractionnaire afin de donner du sens aux nombres rationnels**, puis enseigner le système positionnel décimal, avant de revenir à l'écriture fractionnaire qui est plus difficile à manipuler.

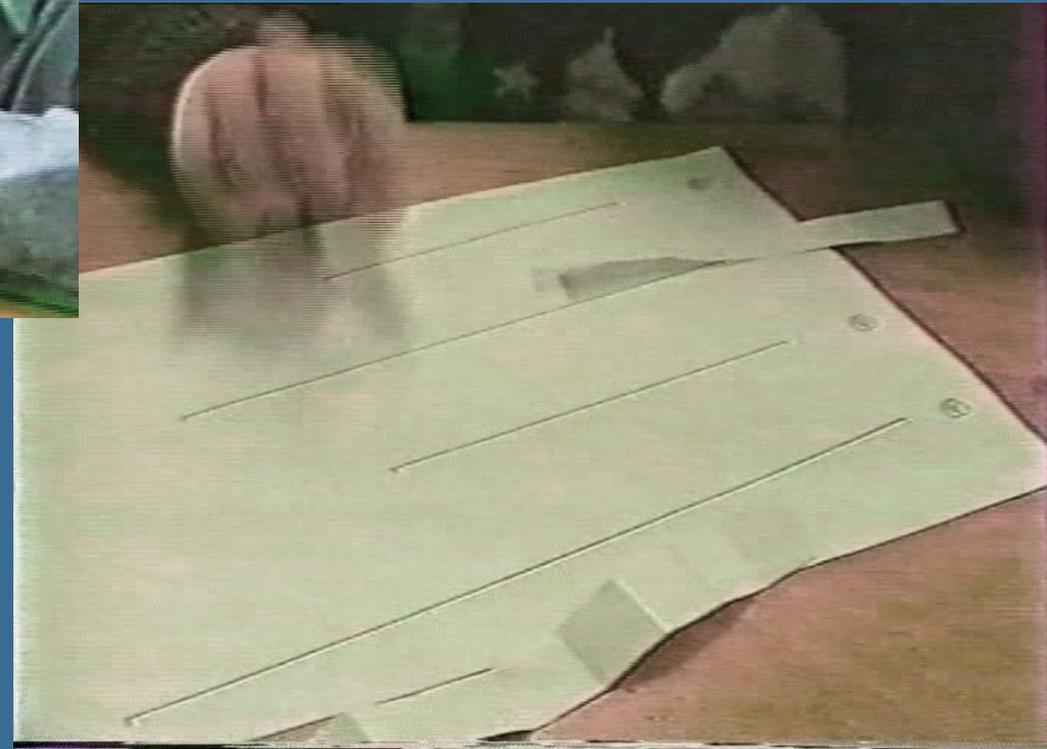
## Bande unité



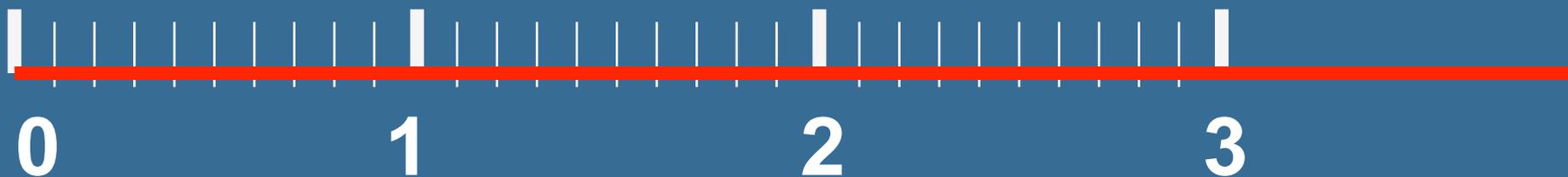
Le segment mesure une unité et la moitié.



« Vous devez écrire un message pour qu'un autre groupe trouve quel segment vous avez choisi parmi les 6 segments donnés. »



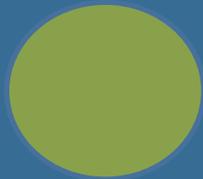
## Bande unité



Construction d'une graduation en reportant une fraction (simple puis décimale)

Passer d'un registre d'expression d'un nombre à un autre

### Analogique



**Verbale**

**Symbolique**



« trois demis »

$$\frac{3}{2}$$

Passer d'un registre d'expression d'un nombre à un autre

## Écriture fractionnaire

$$\frac{2564}{100}$$

### Verbale

« 25 » et « 64 » centièmes

« 25 », « 6 » dixièmes et « 4 » centièmes

### Écriture décimale

25,64

## Attendus de formation

**Alimenter la réflexion sur le projet d'école** dans une logique de parcours de l'élève passant par une logique de cycle.

**Construire une réflexion didactique de cycle sur le nombre** et son caractère déterminant dans la maîtrise du champ mathématique, par un **travail de programmation en lien avec la résolution de problèmes**.

## Temps de travail en équipe (3 heures) : pour le 18/10/2017

Enrichir la programmation de cycle existante dans l'un des trois sous-domaines de la partie « Nombres et calcul », ou dans l'un des deux sous-domaines de la partie « Grandeurs et mesures » :

- Grands nombres entiers, fractions simples, nombres décimaux ;
- Calculer avec des entiers et des décimaux ;
- Résoudre des problèmes utilisant des fractions, des décimaux et le calcul.
  
- Comparer, mesurer des grandeurs géométriques [...] / Utiliser le lexique ;
- Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs [...].

Le choix de l'équipe quant au sous-domaine choisi, sera transmis à François CHEVALIER pour le 04/10/2017.

# Construire le nombre, un continuum...

Le nombre, une invention récente des hommes  
pour répondre à un besoin

Un concept qui sert à prévoir, anticiper (la manipulation ne suffit pas) et qui se construit en 3 dimensions :

**des problèmes** (*besoin*)

**un langage** : verbal (*nombre, paquet...*)  
symbolique (*codage de droite à gauche, numération de position, zéro*)  
analogique (*représentation de la quantité*)

**des invariants** : relations - *suivant/précédent – décompositions*